

学号

姓名

专业

年级

院/系

安徽大学 2022—2023 学年第二学期

《高等代数（下）》期中考试试卷

（闭卷 时间 120 分钟）

考场登记表序号_____

题号、型	一、填空题	二、简答题	三、计算题	四、证明题	总分
得 分					
阅卷人					

一、填空题（每空 5 分，共 25 分）

1. 多项式 $f(x)$ 有重因式的充分必要条件是_____。2. $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$ 的整数根为_____。

3. 已知线性变换 σ 在 V 的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ，则 σ 在 V 的基

 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ 下的矩阵为_____。

4. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ，则 A 的极小多项式为_____。

又设 $B = A^2 - 2A^* + A^{-1} + 3I$ ，则 $|B| - \text{tr}(B) =$ _____。

二、简答题（每题 5 分，共 15 分）

5. 你认为在多项式一章最重要的结论或定理是什么？请阐述你的理由。

6. 设 $\sigma: V \rightarrow V$ 为线性变换, 所有特征子空间的直和 $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$ 是线性空间 V 的真子空间, 即 $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} \subset V$ 。请问如何挑选 V 的一个基, 使得 σ 在该基下的矩阵是 Jordan 标准形?

7. 维线性空间上线性变换 φ 可以对角化的条件有哪些(包括充分条件, 每条 1 分)?

三、计算题 (每题 10 分, 共 40 分)

8. 设 $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ 。求 $(f(x), g(x))$, 以及 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使之满足 $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$ 。

9. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是线性空间 V 的一个基, 已知线性变换 φ 在这个基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

求 φ 的值域与核。

10、已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 求矩阵 A 的 Jordan 标准形和特征矩阵的 Smith 标准形。

11. 已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量。

(1) 试确定参数 a, b 及特征向量 α 所对应的特征值；

(2) 问 A 能否相似于对角阵？说明理由。

四、证明题（每题 10 分，共 20 分）

12. 设线性空间 V 到 W 的维数分别 n 和 m . 令 φ 为 V 到 W 的线性映射，则存在 V 的一个基

$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n$ 到 W 的一个基 $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_m$ ，使得 φ 在这两个基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

13. 证明：线性空间上线性变换的每一个特征值的几何重数不超过它的代数重数。